

ANÁLISE DE TEXTURAS EM IMAGENS DE RADAR USANDO MODELOS ARMA

Luciano Vieira Dutra
Nelson Delfino d'Ávila Mascarenhas

Ministério da Ciência e Tecnologia-MCT
Instituto de Pesquisas Espaciais-INPE
Caixa Postal 515 - 12201 - São José dos Campos - SP

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um método para caracterização de texturas aleatórias utilizando modelos estatísticos autorregressivos e média móvel (ARMA), bem como a utilização desses modelos para melhorar o resultado da classificação pontual de máxima verossimilhança de imagens de radar de abertura sintética (SAR). Sob o ponto de vista estatístico uma imagem é representada como um processo estocástico bidimensional. Foi utilizada, entretanto, uma versão linearizada da imagem concatenando-se segmentos de linhas da imagem formando assim uma sequência unidimensional. Um ou mais modelos ARMA são ajustados a essas sequências obtidas por classes. Tais modelos representam o processo de formação de cada textura do ponto de vista estatístico. A imagem original é filtrada por filtros inversos derivados dos modelos obtidos para cada classe, obtendo-se assim tantos canais quantas classes texturais foram definidas a priori. O treinamento e a classificação das texturas são feitos sobre esse novo conjunto de canais, que se adaptam melhor às condições para o qual o classificador de máxima verossimilhança foi projetado, promovendo assim uma melhoria na precisão da classificação. Testes foram efetuados em imagens de radar. Essas imagens apresentam um tipo de ruído abrangente denominado "speckle" que de certa forma mascara a textura natural do terreno. Mesmo assim, foi observada uma melhoria no desempenho global do classificador.

1 - INTRODUÇÃO

No campo de processamento de Imagens e Reconhecimento de Padrões, tem havido um esforço mais ou menos recente, em pesquisar novos modelos para descrever o comportamento de imagens, que se mostrem mais adequados para a nova geração de satélites, cada vez com maior resolução, onde a suposição da imagem formada por pontos estatisticamente independentes entre si e governada por uma distribuição gaussiana não é mais válida. Nesse ponto ganha maior importância a discriminação de texturas na imagem e os pontos elementares ("pixels") não podem mais serem vistos isoladamente, mas formando arranjos mais ou menos regulares. O grau de regularidade dos padrões evidenciados na imagem determina dois tipos de métodos de descrição: os estatísticos e os estruturais. Os métodos estatísticos são apropriados para modelar texturas difusas, tais como fotos próximas de grãos de areia na praia, imagens de radar e imagens de satélite com florestas, campos e terrenos acidentados. Nessa

classe de métodos podemos salientar os baseados em modelos markovianos [1] e os baseados em modelos autorregressivos e de média móvel. Os métodos estruturais, são normalmente baseados em modelos de percepção visual ou modelos sintáticos [2] e são adequados para imagens que contenham texturas que se caracterizem por um arranjo regular de objetos bem definidos.

Neste trabalho, foi iniciado o estudo para a descrição estatística e classificação de imagens de radar através de modelos ARMA. Essas imagens representam classes com textura predominante determinada por um ruído típico denominado "speckle".

As seções 2, 3 e 4 apresentam os modelos de séries temporais, suas propriedades e técnicas de estimação dos parâmetros. A seção 5 apresenta a estratégia de aquisição dos dados das classes e posterior identificação do modelo mais adequado. Seção 6 apresenta o método de extração dos atributos por filtragem inversa, treinamento e classificação das texturas; a seção 7 apresenta os resultados para classificação de áreas agrícolas, a partir de imagens de radar obtidas na missão SAR-580 (Alemanha Ocidental). Finalmente, a seção 8 contém a conclusão geral.

2 - MODELOS DE SÉRIES TEMPORAIS

Uma série temporal é caracterizada por uma sequência de valores no tempo y_1, y_2, \dots, y_n . O valor médio de y_i é μ . Essa série é modelada como sendo gerada a partir de uma sequência de "shocks" independentes (Eq. 1), que são realizações de um processo de ruído branco com média zero e variância σ_w^2 , que passam por um filtro linear que caracteriza o processo (Figura 1).



Figura 1. Representação do filtro gerador do processo.

$$y_i = \mu + w_i + \alpha_1 w_{i-1} + \alpha_2 w_{i-2} + \dots \quad (1)$$

Alternativamente, um processo estocástico linear pode ser considerado como uma soma ponderada das observações passadas e o ruído branco corrente (Eq. 2).

$$y_i = \beta_1 y_{i-1} + \beta_2 y_{i-2} + \dots + w_i \quad (2)$$

de (1) tem-se o caso particular chamado processo de média móvel (MA(q)) de ordem q (Eq. 3):

$$y_i = \sum_{k=0}^q \alpha_k w_{i-k} + \mu \quad (3)$$

onde $\alpha_0 = 1$; de (2) tem-se o processo autorregressivo de ordem p (Eq. 4).

$$y_i = \sum_{j=1}^p \beta_j y_{i-j} + w_i \quad (4)$$

Combinando (3) e (4) tem-se o chamado processo ARMA (p, q) completo (Eq. 5). A necessidade desse modelo aparece para atender ao chamado princípio da parcimônia, que considera o modelo mais adequado aquele que apresenta o menor número de parâmetros, dentro da hipótese de aceitabilidade do modelo. Tal modelo é usado quando uma série não pode ser modelada convenientemente com modelos (3) ou (4).

$$y_i = \sum_{k=0}^q \alpha_k w_{i-k} + \sum_{j=1}^p \beta_j y_{i-j} + \mu. \quad (5)$$

O modelo (5) é unidimensional e poderia ser usado para descrever uma imagem se essa fosse linearizada concatenando-se linhas ou colunas das imagens. Coeficientes não nulos em atrasos múltiplos do tamanho da linha corresponderiam a pontos colocados espacialmente vizinhos ao ponto sendo gerado. Exemplo: o modelo $y_i = 0,5y_{i-1} - 0,4y_{i-256} + w_i$ é um modelo AR(256) com os coeficientes $\beta_j = 0$ para $j = 2 \dots 255$ e significa que (Fig. 2) o ponto é gerado como combinação linear de um vizinho à esquerda e acima adicionado do ruído branco motor do processo, para uma imagem com linhas de 256 pixels.

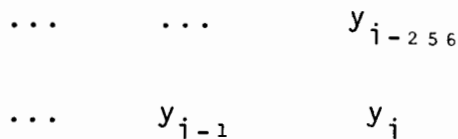


Figura 2 - O modelo de geração de imagens linearizado.

A linearização do processo de formação de imagens conduz a certos problemas de transição entre linhas que serão comentados posteriormente.

Para tomar a transformada Z de um processo que segue o modelo (5) e ignorando a média que pode ser subtraída do processo, a formulação do modelo é refeita:

$$y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j y_{i-j} = \sum_{k=0}^q \alpha_k w_{i-k} \quad (5a)$$

Tomando-se a transformada Z, resulta:

$$\begin{aligned} (1 - \beta_1 Z^{-1} - \dots - \beta_p Z^{-p}) Y(Z) &= \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1 Z^{-1} + \dots + \alpha_q Z^{-q}) W(Z) \end{aligned} \quad (6)$$

$$Y(Z) = \frac{(\alpha_0 + \alpha_1 Z^{-1} + \dots + \alpha_q Z^{-q})}{(1 - \beta_1 Z^{-1} - \dots - \beta_p Z^{-p})} W(Z) \quad (7)$$

Para que o processo gerado $Y(Z) = H(Z)W(Z)$ conforme o filtro-modelo $H(z)$ possa ser fisicamente realizável é necessário que o filtro seja estável e invertível [3] o que significa que os polos e zeros da função de transferência estão dentro do círculo unitário.

3 - PROPRIEDADES DOS MODELOS ARMA

Para se analisar algumas propriedades do modelo, será verificado como se relacionam os coeficientes do modelo à função de autocorrelação do sinal. Considere o modelo AR(p) (Eq. 4). A autocovariança para um processo estocástico estacionário y_i é dada por

$$\gamma_k = E \{y_i y_{i-k}\} (\mu = 0) \quad (8)$$

Segue então de (4), multiplicando ambos os lados da equação por y_{i-k} e tomando o valor esperado que

$$\gamma_k = \beta_1 \gamma_{k-1} + \beta_2 \gamma_{k-2} + \dots + \beta_p \gamma_{k-p} \quad (9)$$

A função de autocorrelação (FAC) é dada por

$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0 \quad (10)$$

Então:

$$\rho_k = \beta_1 \rho_{k-1} + \beta_2 \rho_{k-2} + \dots + \beta_p \rho_{k-p} \quad (11)$$

fazendo $k = 1, 2, \dots, p$ obtêm-se as chamadas equações de Yule Walker, que também são soluções para o problema de predição linear [3] [4] com a condição de minimização do erro quadrático de predição. Quando a ordem do preditor linear alcança a ordem do modelo AR(p), representante do sinal sendo predito, o resíduo se torna branco.

Se ϕ_{ki} é o i -ésimo coeficiente num processo autorregressivo de k -ésima ordem então as equações de Yule Walker se tornam:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-1} & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & & & & \rho_{k-2} \\ \vdots & & & & & & \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix} \quad (12)$$

Dentre os coeficientes ϕ_{ki} o conjunto ϕ_{kk} tem especial interesse, e é chamado função de autocorrelação parcial (FAP(K)). A FAP se anula para $k > p$ quando o processo é AR(p).

Para um processo MA(q) (Eq. 3), fazendo $\tilde{y}_i = y_i - \mu$, tem-se

$$\tilde{y}_i = w_i + \alpha_1 w_{i-1} + \dots + \alpha_q w_{i-q} \quad (13)$$

Sendo a autocovariança dada por

$$\gamma_k = E \{ \tilde{y}_i \tilde{y}_{i-k} \}$$

resulta

$$\gamma_k \begin{cases} = (\alpha_k + \alpha_1 \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{q-k} \alpha_q) \sigma_w^2 & k=1, \dots, q \\ = 0 & k > q \end{cases} \quad (14)$$

onde

$$\sigma_w^2 = E \{ w_i w_i \} \text{ e } E \{ w_i w_j \} = 0 \quad i \neq j$$

Logo, para um processo MA(q), a função de autocorrelação (FAC) se anula para atrasos maiores que q.

Para modelo ARMA completo (Eq. 5) nem a FAC ou a FAP se anulam. De acordo com essas propriedades é possível tentar identificar o modelo subjacente a um processo calculando a FAC e FAP e observando seu aspecto. Na prática porém é preciso estabelecer um critério para saber quando as estimativas são nulas devido à variância dos estimadores das autocorrelações. Segundo Granger e Newbold [5] que citam Anderson [6] pode-se usar o limite de $2(N^{-1/2})$ onde N é o número de amostras, como um indicativo mais ou menos grosseiro para saber se as autocorrelações são zero a partir de um certo atraso. Dessa

maneira obtêm-se imediatamente dois valores provisórios para MA(q) e AR(p). Para tornar o problema de identificação bem definido, foram introduzidos diversos índices, entre os quais o mais utilizado é o chamado índice de Akaike [7] que é posto da seguinte forma:

$$\text{AIC } [p,q] = N \ln (\hat{\sigma}_{p,q}^2) + 2(p+q) \quad (15)$$

onde $\hat{\sigma}_{p,q}^2$ é igual à variância do ruído estimado para o modelo ARMA(p, q).

O modelo escolhido é aquele que minimiza o índice de Akaike (AIC). A partir dos valores iniciais de p e q sugeridos pelas funções de autocorrelação escolhem-se também algumas ordens para modelos ARMA(p, q) de tal maneira que $p < \bar{p}$ e $q < \bar{q}$.

4 - ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS

A estimativa dos parâmetros α_i e β_i é feita em dois passos: 1) uma estimativa preliminar que se vale da função de autocorrelação e que serve como ponto de partida para 2) uma estimativa de máxima verossimilhança que usa os dados diretamente.

A estimativa preliminar para o processo AR(p) é feita substituindo-se as correlações teóricas pelas estimadas na equação de Yule Walker (12). A forma especial da matriz p x p em (12) (denominada Toeplitz) permite uma solução iterativa simples para os parâmetros do modelo.

Para a estimativa preliminar dos parâmetros do modelo MA(q) utiliza-se do algoritmo denominado das inovações [8] [9] que também é um algoritmo iterativo. Outro método é proposto por Marple [3] baseado na relação existente entre os coeficientes do modelo MA(q) e do modelo AR(∞) equivalente.

No caso de modelos ARMA(p,q) Brockwell [8] apresenta um método para determinação preliminar dos parâmetros baseado nas estimativas obtidas pelo algoritmo das inovações para o modelo MA(∞) equivalente e na relação dessas estimativas com a estimativa dos parâmetros AR e MA. Já Marple [3] apresenta um método baseado na chamada equação de Yule Walker modificada, que determina os parâmetros AR do modelo. A série temporal filtrada pelo filtro AR inverso determina uma série do tipo MA cujos parâmetros podem ser estimados pelo processo já mencionado no parágrafo anterior.

Tendo sido identificado um modelo tentativa com certos parâmetros iniciais, deseja-se escolher uma estimativa melhor para esses coeficientes. O método mais usado é o método dos mínimos quadrados e que corresponde à minimização da soma dos resíduos quadráticos [10]. Deseja-se então encontrar os parâmetros que minimizem

$$S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \sum_{t=1}^N \mu_t (\hat{\alpha}, \hat{\beta})^2 \quad (16)$$

dentre o conjunto de parâmetros possíveis.

Como se trata de um problema de estimação não linear, utiliza-se para obtenção dos parâmetros de métodos iterativos tais como o método de Gauss-Newton [11].

Deseja-se também calcular uma estimativa do erro de cálculo dos parâmetros.

As estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros dos modelos são variáveis aleatórias desde que são funções dos dados. Da teoria estatística [11] sabe-se, que em condições mais ou menos gerais, para "grandes" amostras as estimativas são distribuídas normalmente com matriz de covariância dada por:

$$V(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 S(\theta)}{\partial \theta_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 S(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_{p+q+1}} \\ & \ddots & \\ & & \frac{\partial^2 S(\theta)}{\partial \theta_{p+q+1}^2} \end{bmatrix} \cdot 2\sigma_w^2$$

$$\theta = [\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \mu]$$

As segundas derivadas são calculadas nos valores finais dos parâmetros, utilizando-se do resultado da última linearização no processamento iterativo. A raiz quadrada dos elementos da diagonal principal dão o desvio padrão ($SE(\theta_i)$) do parâmetro. Assim, para que um parâmetro seja significativamente $\neq 0$ com 95% de probabilidade basta verificar se $|\theta_i| > 2 SE(\theta_i)$.

O conhecimento do erro padrão para os parâmetros auxíla o processo de identificação pois os parâmetros não significativos podem ser retirados do modelo e reestimados os parâmetros restantes.

5 - AQUISIÇÃO E IDENTIFICAÇÃO

Neste trabalho foi utilizado o programa PEST de identificação e estimação de parâmetros de modelos ARMA para séries temporais univariadas. Este programa acompanha o livro de Brockwell [8].

A sistemática adotada segue os seguintes passos:

a) Adquirir os dados referentes às áreas de treinamento, concatenando-se segmentos de linha ou coluna. Segmentos de tamanho 20 a 30 são o tamanho ideal, mas restrições práticas podem reduzir o tamanho necessário.

b) Retirar a média do sinal e plotar as funções FAC e FAP. Pela observação dessas funções determinar p e q tal que as funções sejam consideradas nulas (dentro do intervalo de confiança).

c) Obter as estimativas preliminares para AR(p), MA(q) e ARMA(p, q). Metodicamente eliminar as ordens de modelos que resultarem não causais ou não invertíveis.

d) De posse do erro padrão para os coeficientes preliminares zerar os não significativos (esses parâmetros não serão mais considerados para otimização).

e) Submeter os três modelos à estimativa de máxima verossimilhança. Escolher o de menor índice de AKAIKE (AIC). Observar que a natureza originalmente bi-dimensional dos dados vai revelar rapidamente a região de suporte do filtro. Pode ser necessário reter mais de um filtro quando as diferenças de AIC não forem significativas.

f) Fazer o teste diagnóstico do modelo para verificar se o resíduo é branco. Caso contrário testar os outros modelos ou alterá-los adicionando ou retirando parâmetros com valor próximo a 2 vezes o desvio padrão do estimador.

6 - EXTRAÇÃO DE ATRIBUTOS E CLASSIFICAÇÃO

Uma vez determinado o modelo referente às classes de texturas presentes na imagem o processo de classificação da imagem toda desenvolve-se em dois passos:

- a) Extração de atributos
- b) Classificação supervisionada ponto a ponto (máxima verossimilhança)

Na fase de extração de atributos a imagem toda é filtrada pelos filtros inversos casados a cada textura da imagem gerando resíduos. Resíduo é a diferença entre o valor predito pelo modelo para aquele ponto da imagem e o valor real existente. Quanto maior for o ajustamento do modelo à classe, menor será o resíduo. Serão gerados tantos canais quantos forem os filtros (e portanto classes) existentes. A operação de filtragem resulta em dois efeitos principais:

a) A região correspondente ao canal filtrado pelo filtro casado apresenta menor variação dos resíduos.

b) A região casada torna-se um campo aleatório branco e mesmo as regiões não casadas têm sua correlação espacial diminuída pelo fato de que os modelos em geral têm caráter rejeita faixa com maior reforço nas altas frequências.

Gambotto [12] e Therrien [13] apresentaram uma proposta de classificação associando o ponto à classe de menor resíduo. Essa proposta apresenta porém duas desvantagens: 1) assume que as médias das diversas texturas são iguais e 2) não considera a correlação existente entre as saídas do filtro.

Neste trabalho é proposto um esquema de classificação que considera a saída dos filtros como um vetor de atributos. Não há restrições sobre as médias dos componentes desses vetores. O branqueamento dos campos aleatórios e o caráter quase gaussiano dos vetores sugere a utilização do conhecido classificador de máxima verossimilhança como descrito em Mascarenhas [14].

A classificação então se dá em dois passos: treinamento, preferivelmente nas áreas de treinamento para identificação, e classificação propriamente dita, onde os pontos são assinalados às classes conforme a menor distância de Mahalanobis aos centros das classes no espaço filtrado, e não se comparando apenas os resíduos como sugerem Therrien [13] e Gambotto [12].

Deve ser observado que poderão ocorrer problemas na transição entre fronteiras devido ao tamanho não unitário da região de suporte do filtro. Esse problema, porém, é minimizado no método que é proposto pois este possibilita a consecução de um modelo ARMA completo geralmente parcimonioso, isto é, com pequeno número de coeficientes. A literatura traz a utilização mais comum dos modelos autorregressivos.

7 - RESULTADOS

Testes foram efetuados em uma imagem de radar de abertura sintética da missão SAR-580 sobre uma área da Alemanha, sensor cujo uso se torna cada vez mais intenso devido à facilidade de se obter imagens em quaisquer condições de tempo. O radar apresenta entretanto desafios de processamento, pois apresenta o fenômeno da presença de um ruído abrangente denominado "speckle" que se supõe multiplicativo. Esse ruído em imagens de radar até certo ponto mascara a textura natural do terreno, como será observado nos resultados apresentados. Foram consideradas três áreas de treinamento na imagem do radar correspondentes a três classes: floresta, cultura anual, restos de cultura.

Para o processo todo de utilização da informação textural na classificação têm-se as três fases descritas nos parágrafos anteriores: 1) aquisição e identificação, 2) extração de atributos e 3) classificação.

Como resultado da 1ª fase foi possível obter os seguintes modelos (Fig. 3.) seguindo a metodologia descrita na Seção 5, sendo necessárias as seguintes observações: as áreas de treinamento possuem 1000 pontos resultantes da concatenação de 100 linhas de 10 pontos cada. O tamanho do segmento foi escolhido como 10 devido à restrição do programa PEST de analisar apenas até ordem 21 (correspondendo a uma região de suporte com 2 linhas). São mostrados apenas os modelos AR.

	o	.250		
.055	.604	-.111	.05	
	-.222			

(a)

	o	.464	-.180	.063
.051	.622	-.337	.102	
	-.252	.098		

(b)

	o	.500	-.190	
.102	.654	-.338		
	-.257	.107		

(c)

Fig. 3 - Modelos autorregressivos para as classes:
(a) Floresta-(b) Restos de cultura-(c) Cultura Anual

Os modelos apresentam certa similaridade entre si o que indica certa predominância da estrutura do ruído "speckle" sobre a textura. O tamanho da região de suporte dos filtros denota que o ruído "speckle" não é branco, possuindo grande correlação espacial.

A segunda fase do processo consiste na obtenção dos resíduos, que se obtêm colocando os filtros-modelo na forma denominada de inovações ou filtro inverso. A Figura 4 mostra o filtro inverso para o modelo Floresta.

				+.222
-.05	.111	-.604	-.055	
	-.25	1.0		

(a)

Fig. 4 - Filtro modelo floresta no formato inovações.

Depois de filtradas as áreas de treinamento foi efetuado um teste de "branqueamento" das classes originais pelos filtros correspondentes. No caso das três classes a única correlação

significativa foi a do atraso (0,0) demonstrando serem os campos resíduos brancos e por conseguinte os modelos adequados.

No passo seguinte é feito o treinamento do classificador de máxima verossimilhança MAXVER [14] a partir dos canais filtrados. A Tabela I apresenta os índices de desempenho de classificação para o canal original e para o conjunto de 3 canais derivados por filtragem. Também é apresentada a distância JM [13] que indica a separabilidade das classes em cada caso. Os índices de desempenho são os seguintes: Dm, denominado desempenho médio, é a média ponderada pelo número de pontos em cada área de treinamento, da percentagem de classificação correta dos "pixels" em cada área; Am, abstenção média, e Cm confusão média, têm definição semelhante.

TABELA I

MATRIZ DE CLASSIFICAÇÃO PARA ÁREAS DE TREINAMENTO
SAR-580 - 3 CLASSES

Canais Índice	Original	Filtrados
DJM	.5855	.718371
Dm	53.10	58.13
Am	.27	.87
Cm	46.63	41.00

Na tabela pode-se observar a melhoria no poder de classificação desde que a distância JM aumentou indicando maior separabilidade das classes no espaço transformado. Tal comportamento se refletiu em melhoria nos índices de desempenho.

Entretanto tal melhoria não foi muito grande. Como observado anteriormente os modelos representativos das classes são algo semelhantes, principalmente as classes "cultura" e "restos", permitindo então a conclusão de que a textura do ruído "speckle" não contribui para a classificação, e mesmo atrapalha na medida em que mascara a estrutura da textura natural que se reflete parcialmente nos modelos.

8 - CONCLUSÃO

Foi apresentado um novo processo para a determinação de modelos bidimensionais ARMA completos a partir da determinação do modelo unidimensional e considerações sobre a significância dos parâmetros. A modelagem se tornou satisfatória segundo testes diagnósticos efetuados. Foi apresentado também um novo método para a classificação de texturas, usando um esquema de filtragem inversa e classificação de máxima verossimilhança. Os resultados da classificação para um exemplo em radar mostraram desempenho razoável devido à presença do ruído "speckle".

Em trabalhos futuros, o método será testado em outros tipos de imagem. Por outro lado a característica predominante do ruído "speckle" sugere a pesquisa de métodos de filtragem inversa para restauração das imagens de radar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] YU, TS.; FU, K.S.; Recursive contextual classification using a spatial stochastic model. Pattern Recognition 16(1):89-108, 1983.
- [2] HARALICK, R.M.; Statistical and structural approaches to texture. Proceedings of the IEEE, 67(5), May, 1979.
- [3] MARPLE, S.L.; Digital Spectral Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.
- [4] BOX, G.E.P; JENKINS, G.M.; Time Series Analysis, Forecasting and Control. Holden Day, San Francisco, 1970.
- [5] GRANGER, N.; NEWBOLD, P.; Forecasting Economic Time Series. Academic Press, New York, NY, 1977.
- [6] ANDERSON, R.L.; "Distribution of serial correlation coefficients", Ann Math. Stat. 13:1-13, 1942.
- [7] AKAIKE, H.; "Fitting autorregressive models for prediction". Ann Inst. Stat. Math. 21:243-247, 1969.
- [8] BROCKWELL, P.J.; DAVIS, R.A.; Time series: Theory and Methods. Springer Verlag, New York, 1987.
- [9] KAILATH, T.; "An innovations approach to least squares estimation - Part I: Linear filtering in additive white noise", IEEE Transactions on Automatic Control, AC-13:646-654, 1968.
- [10] TOU, J.T.; KAO, D.B.; CHANG, Y.S.; "Pictorial texture, analysis and synthesis", Third Joint Conf. on Pattern Recognition, Coronado, CA, Aug, 1986 .
- [11] NELSON, C.R.; Applied Time Series Analysis for Managerial Forecasting, Holden Day, San Francisco, CA, 1973.
- [12] GAMBOTTO, J.C.; Two Dimensional Time Series for Textures. IN: SIMON, JC; HARALICK, R.M.; (eds) Digital Image Processing, D. Reidel Publishing Co, New York, NY, 1980.
- [13] THERRIEN, C.W.; "An Estimation-Theoretic Approach to Terrain Image Segmentation". Computer Vision, Graphics and Image Processing, 22:313-326, 1983.
- [14] MASCARENHAS, N.D.A.; VELASCO, F.R.D.; Processamento Digital de Imagens. IME-USP, São Paulo, SP, 1984 (Quarta Escola de Computação).